Leçon 220 Equations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2

I] Généralités

1) Quelques définitions

Définition 1 [DEM] p135. Soit U ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue. Une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre 1 est (E) $y' = f(t, y(t))$, $(t,y) \in U$.

Remarque 2 [BER] Toute équation d'ordre > 1 peut se mettre sous la forme d'une EDO d'ordre 1.

Définition 3 [DEM p135] Une solution de (E) sur $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^m$ telle que : $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.

Définition 4 [DEM p 139] Soit $y : I \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ des solutions de (E). Alors $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}|_I = y$.

Définition 5 [DEM] $y : I \to \mathbb{R}^m$ solution maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y}$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$.

Définition 6 [DEM] Soit $U = J \times \Omega$ ouvert avec $J \subset \mathbb{R}$ intervalle, Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$. Alors une solution globale est une solution définie sur J tout entier.

Remarque 7 : Globale $\Rightarrow$ maximale.

2) Existence et unicité des solutions

Théorème 8 [DEM p136] Soit $(t_0, y_0) \in U$. Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E) sur I intervalle contenant t_0 tel que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 9 [BER p18] Lemme de GRÖNWALL (intégral) Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Supposons $v \geq 0$ et $\forall t \in I$ tq $t \geq t_0$,
$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)\,ds$.
Alors $\forall t \geq t_0$ dans I, $u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)\right)ds$.

Théorème 10 [BER p93] CAUCHY-LIPSCHITZ (local) Soit U ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{K}^m$ continue et localement lipschitzienne par rapport à sa 2^e variable. Soit $(t_0, y_0) \in U$. Alors $\exists \alpha > 0$ tel que le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ pour (E) ait une unique solution y définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemme 11 [BER p85] Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^N$, $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$ non tous les 2 nuls et $r_0 \in]0, +\infty]$. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$. Soit $f : I \times \overline{B}(y_0, r_0) \to \mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, uniformément par rapport à la variable de temps. Pour $y \in \tilde{E} = \mathcal{C}(I, \overline{B}(y_0, r_0))$, on définie sur I
$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,ds.$$
En supposant que $\phi(y) \in \tilde{E}$ pour tout $y \in \tilde{E}$, alors $\exists!\, y : I \to \mathbb{K}^N$ solution globale de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 12 [BER p90] CAUCHY LIPSCHITZ (global) [DÉV 1]
Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f : I \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à y. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^m$. Alors $\exists!\, y : I \to \mathbb{K}^m$ solution globale de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

Remarque 13 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire entre dans le cadre globalement lipschitzien.

Théorème 14 [DEM p154] Soit $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E) avec f localement lipschitzienne en y. Si $y_1 = y_2$ en un point de I, alors $y_1 = y_2$ sur I entier.

Théorème 15 [BER p107] Sortie de tout compact Soit U ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^m$, $f : U \to \mathbb{K}^m$ continue, localement lipschitzienne par rapport à y. Soit $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}^m$ une solution maximale de (E). Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de U quand $t \to \beta$.
Plus précisement, $\forall K \subset U$ compact, $\exists V \in \mathcal{V}(\beta)$ tel que $(t, y(t)) \notin K$, $\forall t \in V$.

Théorème 16 [BER p109] Théorème des bouts Soit $U =]a,b[\times \mathbb{K}^m$, $f : U \to \mathbb{K}^m$ continue et localement lipschitzienne par rapport à y. Soit $y :]c,d[\to \mathbb{K}^m$ solution maximale de (E).
Si $d < b$, alors $\|y(t)\| \xrightarrow[t \to d]{} +\infty$. Si $t \mapsto y(t)$ bornée, alors $d = b$.

II] Étude quantitative

1] Equations différentielles linéaires (ordre 1) [DEM p177]

Soit (E) : $y' = a(t)y + b(t)$ avec a, b continues.
On introduit (E_0) : $y' = a(t)y$ sur $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 17 La solution générale de (E) s'écrit $y = y_H + y_p$ où y_p solution particulière et y_H solution de (E_0).

Théorème 18 Les solutions maximales de (E_0) forment un espace vectoriel de dimension 1 ayant pour base $t \mapsto e^{A(t)}$.
Ici, $y(t) = e^{A(t)}\left(\lambda + \int_{t_0}^t b(x)e^{-A(x)}dx\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I.
Pour la condition $y(t_0) = y_0$, on a $\lambda = e^{-A(t_0)}y_0$.

2] Quelques méthodes de résolution classiques.

Méthode 19 : Équations différentielles à variables séparées [DEM p170]
Notons (E) : $y' = f(t)g(y)$ avec f et g continues.
Sur $U = \{(t,y) / g(y) \neq 0\}$ ouvert, on a $dy/g(y) = f(t)dt$.
On note F une primitive de f et G une primitive de $1/g$. On a donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $G(y) = F(t) + \lambda$.
G étant continue strictement monotone, elle admet une réciproque G^{-1}.
donc $y = G^{-1}(F(t) + \lambda)$.

Méthode 20 : Équation de Bernoulli [DEM p179]
Soit (E) : $y' = p(t)y + q(t)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues. On se place dans $U = \mathbb{R}\times]0,+\infty[= \{(t,y) / y > 0\}$. On multiplie (E) par $y^{1-\alpha}$:
(E) $\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' = p(t)y^{1-\alpha} + q(t)$.
On pose $z = y^{1-\alpha}$: (E) $\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}z' = p(t)z + q(t)$.
On est ramené à une équation linéaire en z d'ordre 1.

Méthode 21 Équation de Riccati [DEM p 179].
Soit (E) : $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues. Si on connaît une solution particulière y_1, on pose $y = y_1 + z$. Alors on a :
$(E) \iff z' = (2a(t)y_1 + b(t)) + a(t)z^2$. C'est une équation de Bernoulli pour $\alpha = 2$
On la ramène à une équation linéaire en posant $w = 1/z$.

3] Méthode d'approximation numérique [BER p 312]

Soit $y' = f(t, y(t))$, $t \in [t_0, t_0+T]$ avec $f : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à y, avec la condition $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$.
Par théorème de Cauchy-Lipschitz (Th. 12), il existe une unique solution définie sur $[t_0, t_0+T]$.

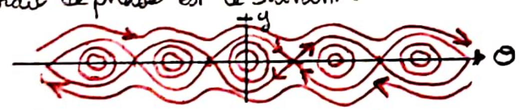
Méthode 22 Schéma d'Euler explicite
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} < \dots < t_N = t_0 + T$ subdivision de $[t_0, t_0+T]$
En posant $h_m = t_{m+1} - t_m$ le pas, $y(t_{m+1}) = y(t_m + h_m)$
On peut faire un développement limité :
$y(t_{m+1}) = y(t_m) + h_m y'(t_m) + o(h_m) = y(t_m) + h_m f(t, y(t_m)) + o(h_m)$
Ceci conduit à la méthode numérique suivante $\begin{cases} y_{m+1} = y_m + h_m f(t_m, y_m) \\ y_0 = y_0 \end{cases}$
pour $m \in [0, N-1]$

Proposition 23 La méthode d'Euler explicite est convergente.

III] Étude qualitative

1] Portrait de phase [BER p 179]

Définition 24 : Une équation différentielle autonome est de la forme (A) : $y' = f(y)$
Définition 25 : Les courbes intégrales du champ de vecteurs f localement lipschitzien sont les trajectoires des solutions maximales de (A).
Définition 26 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. Alors l'orbite de (A) issue de y_0 est la courbe intégrale passant par y_0.
Définition 27 : Le portrait de phase de (A) est la partition de U en orbites.
Exemple 28 : Le mouvement du pendule est décrit par le système $\begin{cases} \theta' = y \\ y' = -K\sin\theta \end{cases}$
avec K constante. Les solutions $\theta(t)$ décrivent le mouvement de la bille. Son portrait de phase est le suivant :
[HUB p 267]



2] Points stationnaires et périodicité

Définition 29 [BER p 181] Soit $I \subset \mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{K}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{K}^n$. Étant donnée l'équation $y' = f(t, y)$, un point stationnaire est un point $y^* \in \Omega$ tel que $\forall t \in I$, $f(t, y^*) = 0$.

Proposition 30 : [BER p 186] Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ continue. Soit y solution de (A) définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{\infty} y(t) = y^*$, $y^* \in \mathbb{K}^n$. Alors y^* est un point stationnaire.
Proposition 31 : [BER p 186] Soit $f : U \to \mathbb{K}^n$ localement lipschitzienne sur U. Soit y une solution maximale de (A) définie sur $]a, b[$. Si $\exists t_2 > t_1$ tel que $y(t_1) = y(t_2)$ alors $]a, b[= \mathbb{R}$ et y est périodique.

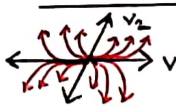
3] Stabilité

Définition 32 [QUE p 381] Un point d'équilibre de (A) est un point y_0 tel que $f(y_0) = 0$
Définition 33 [QUE] Soit y_0 point d'équilibre de (A)
- y_0 stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si y solution vérifiant $|y(t_0) - y_0| < \delta$, on a $\forall t \geq t_0$ y définie et $|y(t) - y_0| \leq \varepsilon$.
- y_0 asymptotiquement stable si $\exists \delta > 0$ tel que si y solution vérifiant $|y(t_0) - y_0| < \delta$, on a y définie $\forall t \geq t_0$ et $\lim_{\infty} y(t) = y_0$.

4] Étude des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ [HUB p 320] (ou [QUE p 382])

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Étudions l'allure des trajectoires dans le plan du système
(E) : $X' = AX \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Remarque : (0,0) est toujours un point d'équilibre de (E).
Cas 1 : les valeurs propres de A, notées λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et distinctes
On note v_1, v_2 les 2 vecteurs propres associés. Les solutions s'écrivent :
$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Noeud répulsif :

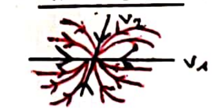


Toutes les trajectoires partent de (0,0) et s'éloignent à l'infini.
Les 4 demi-droites de direction v_1 et v_2 sont des trajectoires.

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: COL : les 2 demi droites de direction v_1 sont des trajectoires orientées vers (0,0). Celles de direction v_2 sont orientées à l'infini.

Les autres trajectoires non réduites à (0,0) partent asymptotes à l'une des deux premières et finissent $(t \to +\infty)$ asymptotes à l'une des 2 dernières.

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ Noeud attractif

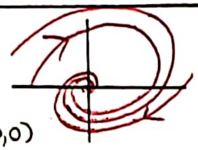


Toutes les trajectoires tendent vers (0,0) en $+\infty$.
Les trajectoires (en rouge) arrivent à l'origine tangentiellement à v_2.

Cas 2 Les valeurs propres de A sont complexes de la forme $\alpha \pm i\beta$.
Soit v le vecteur propre associé à $\alpha + i\beta$ (et $\bar{v}$ celui associé à $\alpha - i\beta$).
On écrit $v = w_1 - i w_2$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ et on trouve $\begin{cases} Aw_1 = \alpha w_1 + \beta w_2 \\ Aw_2 = -\beta w_1 + \alpha w_2 \end{cases}$
Ainsi on définit la transformation linéaire définie par A dans la base (w_1, w_2) par
$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, et on a $e^{tA_1} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$. On va observer que les trajectoires tournent autour de (0,0), en faisant un tour pendant l'intervalle de temps $\frac{2\pi}{\beta}$

tout en s'éloignant ou se rapprochant suivant $e^{\alpha t}$.

- $\alpha<0$: Foyer attractif ; les trajectoires spiralent vers $(0,0)$



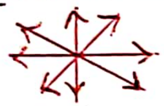
- $\alpha=0$: Centre : les trajectoires sont des ellipses centrées en $(0,0)$

les solutions sont périodiques.

- $\alpha>0$: Foyer répulsif

Les trajectoires s'éloignent de l'origine :

Cas 3 • A admet une valeur propre double λ. La solution est $X(t)=e^{\lambda t}X_0$

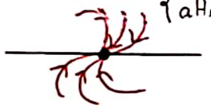
$\lambda>0$  ou $\lambda<0$ 

Om suppose ici que tout vecteur est vecteur propre.

• Si il n'y a qu'une seule direction propre : soit v_1 vecteur propre et v_2 vecteur indépendant de v_1. Dans la base (v_1,v_2), $A_1=\begin{pmatrix}\lambda & \alpha\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$

$\Rightarrow e^{tA_1}=e^{t\lambda}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Ainsi le point $(0,0)$ est $\begin{cases}\text{répulsif si } \lambda>0\\ \text{attractif si } \lambda<0\end{cases}$

$(\lambda>0)$

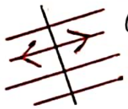


$(\lambda<0)$

Cas 4 Si l'une ou les deux valeurs propres de A sont nulles, $A\neq 0$

$\lambda_1=\lambda_2=0$

$(\lambda_2<0)$ ou



$(\lambda_2>0)$

$\lambda_1=0$ et $\lambda_2\neq 0$

5] Exemple : le système de Lotka-Volterra [BER p197]

Définition 34 : Om note $p(t)$ la quantité de proies et $r(t)$ celle de prédateurs. Le système s'écrit : $(E)\begin{cases}p'=ap-bpr\\ r'=-cr+dpr\end{cases}$, $a,b,c,d>0$ constantes.

Proposition 36 [DÉV 2]

Soit $t_0\in\mathbb{R}$, $(p_0,r_0)\in([0,+\infty[)^2$. Il existe une unique solution maximale du système (E) pour la condition de Cauchy (p_0,r_0) en t_0.

Cette solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

Si $p_0,r_0>0$, alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $p(t),r(t)>0$

De plus, dans ce cas, $t\mapsto(p(t),r(t))$ est périodique.

Références

[DEM] : Analyse numérique et équations différentielles, J.P DEMAILLY Collection Grenoble Sciences

[BER] : Équations Différentielles, F. BERTHELIN, CASSINI

[QUE] : Analyse pour l'agrégation 4e édition, C. ZUILY et H. QUEFFÉLEC, DUNOD

[HUB] : Équations différentielles et systèmes dynamiques, J. HUBBARD et B. WEST, CASSINI.

Développements

1] Cauchy Lipschitz global [BER p90]

2] Lotka-Volterra [BER p197]